# Обыкновенные дифференциальные уравнения.

# 2.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). ДУ 1-го порядка. Частные и общее решения ДУ, интегральные кривые. Задача Коши и теорема существования и единственности ее решения. Особые точки и особые решения ДУ.

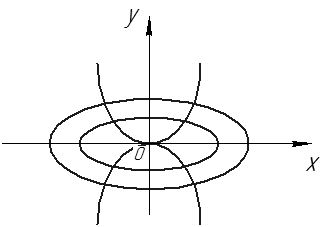


Рис. 30

Рассмотрим на плоскости семейство эллипсов

– произвольная положительная постоянная (см. рис. 30).

Найдем семейство кривых, ортогональных семейству эллипсов.

1. Составим дифференциальное уравнение (ДУ) семейства эллипсов.

Продифференцируем уравнение (2.1.1), считая :

Отсюда - ДУ семейства эллипсов. Тогда =

1. Составим ДУ ортогонального семейства. В т. угловой коэффициент касательной должен быть равен , т.е. ДУ ортогонального семейства:

.

1. Найдем уравнение ортогонального семейства:

Получаем – семейство парабол.

***Обыкновенное ДУ 1-го порядка -***

, где – неизвестная функция; – функция 3-х переменных.

ДУ 1-го порядка, разрешенные относительно производной:

– определена в области .

***Опр.*** Частным решением ДУ (2.1.2) называется функция , определенная на , при подстановке которой в ДУ (2.1.2) оно обращается в тождество на , т.е. .

*Пример*.

.

– частное решение, т.к. – тождество;

*–* также частное решение, т.к. – тождество.

***Опр.*** График частного решения ДУ называется интегральной кривой ДУ

***Опр.*** Равенство , неявно задающее решение ДУ называется частным интегралом ДУ .

***Задача Коши для ДУ :*** найти частные решения ДУ, удовлетворяющие начальному условию , где ,

*т.е. задача Коши* может быть записана следующими образом:

***Геометрический смысл:*** найти интегральную кривую ДУ , проходящую через т. .

***Теорема Коши существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка.***

Пусть функция и ее частная производная непрерывны в области . Тогда для точки существует и при том единственное решение задачи Коши.

***Геометрический смысл:*** единственная интегральная кривая, проходящая через т. .

*Замечание.* Решение определено только в окрестности т. .

*Пример.*

и непрерывны в области

, т.е. в окрестности точки 0. В любой большей окрестности 0 функция и не удовлетворяет ДУ в этих точках.

*Пример* (неединственность в задаче Коши).

*,*

Из начального условия .

– также решение данной задачи Коши.

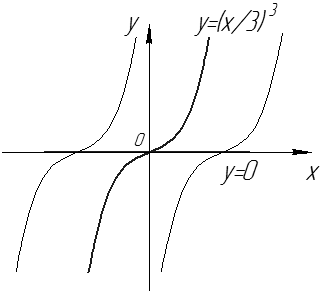


Рис. 31

Через точку проходит более одной интегральной кривой (см. рис. 31). Не выполняется условие непрерывности

***Опр***. Общим решением ДУ называется семейство функций, зависящих от параметра , т.е. , – произвольная постоянная, такое, что:

1. для фиксированного функция является частным решением,
2. для т. такое, что частное решение удовлетворяет начальному условию

*Замечание*. ДУ можно записать в виде (используя то, что .

***Опр***. Равенство , неявно задающее общее решение называется общим интегралом ДУ

# Геометрическая интерпретация ДУ 1-го порядка. Поле направлений. Геометрическое решение ДУ 1-го порядка с помощью изоклин.

Пусть для ДУ выполняется условие существования и единственности, т.е. через любую точку проходит ровно одна интегральная кривая - график частного решения .

Угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке равен . Таким образом, в каждой точке области ДУ (2.1.2) задает направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку В задано поле направлений (см. рис. 32).

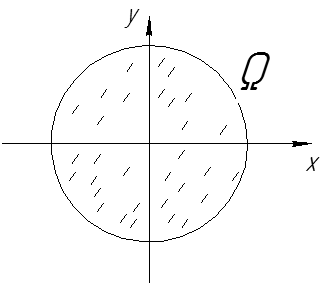
******

Рис. 32

***Опр.*** Изоклиной ДУ (2.1.2) называется кривая, во всех точках которой угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через заданную точку, одинаковый и равен заданному .

*Уравнение изоклины*:

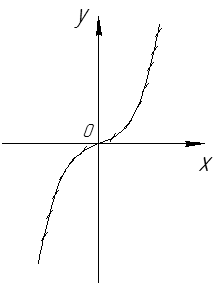
**

Рис. 33

*Пример.*

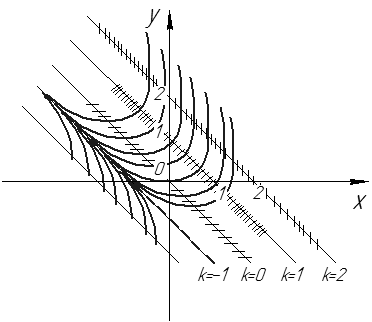


Рис. 34

Уравнение изоклин:

Прямая является изоклиной и является интегральной кривой, т.к. – частное решение ДУ, т.е. является асимптотой для интегральных кривых (другие интегральные кривые приближаются к этой прямой, но не пересекают ее, т.к. через одну точку проходит только одна интегральная кривая.)

При

При

Отсюда на прямой находятся точки локального минимума решений ДУ.

.

(см. рис. 34)*.*

# Простейшие типы ДУ 1-го порядка (с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли) и их решение.

1. *ДУ с разделяющимися переменными*

или

*.*

Запишем ДУ в виде

Проинтегрируем:

– общий интеграл, – произвольная постоянная.

*Замечание.* Если уравнение имеет корни , то функции являются частными решениями ДУ.

*Пример.*

*–* также решение ДУ.

1. *Однородные ДУ*

Замена , тогда

Тогда, подставляя в ДУ получим

– ДУ с разделяющимися переменными, находим .

*Пример.*

*(x>0).*

Замена: . Подставим в ДУ:

,

– общий интеграл.

– решение, т.е. , т.е. .

1. *Линейные ДУ 1-го порядка.*

– линейное однородное ДУ (ЛОДУ) 1-го порядка.

– линейное неоднородное ДУ (ЛНДУ) 1-го порядка.

1. ЛОДУ 1-го порядка.

– с разделяющимися переменными

– первообразная

(р получаем при ).

1. ЛНДУ 1-го порядка.
2. Решим соответствующее ЛОДУ: – произвольная постоянная
3. Решение ЛНДУ ищем методом вариации постоянной, т.е. в виде

Тогда

Подставим в ЛНДУ:

Находим ; интегрируем, находим .

*Пример.*

1. Соответствующее ЛОДУ:
2. Ищем решение ЛНДУ в виде

Подставляем в ЛНДУ:

Проинтегрировав, получим

Подставим в (2.3.1):

=

*Замечание.*  ДУ

сводится к ЛНДУ относительно обратной функции

Решаем методом вариации произвольной постоянной:

.

1. *Уравнения Бернулли*

,

.

Ищем решения в виде . Подставим в ДУ:

,

Найдем функцию такую, что

– ДУ с разделяющимися переменными (ЛОДУ).

Используя (2.3.2), получим

– ДУ с разделяющимися переменными. Найдем

*Пример.*

Найдем из ДУ .

Подставим в (2.3.3):

,

Тогда

*Замечание.* ДУ

сводится к ДУ Бернулли относительно функции :

Решение ищем в виде

***Сведение ДУ Бернулли к ЛНДУ.***

Разделим на (при – решение):

Пусть , тогда ,

Подставим в ДУ:

*Пример.*

(ДУ Бернулли при ; – решение).

Разделим на

Замена

Подставим, получим

.

Решая методом вариации постоянной, получим

, т.е.

и

.

# 

# ДУ n-го порядка. Частные и общее решения. Задача Коши, ее геометрическая интерпретация при n=2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Краевая задача.

,

– функция от переменных.

ДУ n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

определена в области .

***Опр***. Функция называется частным решением ДУ (2.4.1)на интервале , если при ее подстановке в (2.4.1) получается тождество на .

***Задача Коши для ДУ n-го порядка***

Найти частное решение ДУ (2.4.1), удовлетворяющее начальным условиям:

где точка .

***При*** задача Коши имеет вид

*,*

***геометрический смысл:*** найти интегральную кривую, проходящую через точку плоскости и имеющую заданный угловой коэффициент касательной в т. .

***Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ n-го порядка***

Пусть функция и ее частные производные непрерывны в области . Тогда для точки , что на интервале существует и при том единственное решение задачи Коши.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть для ДУ n-го порядка выполняется условие существования и единственности. При каких возможно расположение интегральных кривых (см. рис. 35, 36)?

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 35 | Рис. 36 |
| (Ответ: соответственно | *.)* |

***Опр***. Общим решением ДУ n-го порядка (2.4.1) называется семейство функций , зависящее от произвольных постоянных такое, что

1. Для фиксированной функция является частным решением ДУ (3).
2. Для точки такие, что частное решение удовлетворяет начальным условиям (2.4.2).

***Краевая задача для ДУ 2-го порядка:*** найти частное решение на отрезке [,] ДУ

*удовлетворяющее краевым условиям*

***Опр.*** Равенство , неявно задающее общее решение ДУ n-го порядка называется общим интегралом ДУ n-го порядка.